

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

Trunchi comun

+

curriculum diferențiat

Prefață	3
ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE	5
Capitolul I. PERMUTĂRI	5
1. Noțiunea de permutare	5
2. Operații cu permutări. Proprietăți	7
2.1. Compunerea permutărilor de gradul n	7
2.2. Proprietăți ale compunerii permutărilor de gradul n	8
2.3. Puterea unei permutări de gradul n	9
2.4. Proprietăți ale transpozițiilor	9
3. Inversiunile unei permutări. Semnul unei permutări	11
Capitolul II. MATRICE	17
1. Tabel matriceal. Matrice. Mulțimi de matrice	17
2. Operații cu matrice	20
2.1. Adunarea matricelor	20
2.2. Înmulțirea matricelor cu scalari	22
2.3. Înmulțirea matricelor	23
2.4. Puterea unei matrice pătratică	26
2.5. Transpusa unei matrice	30
Capitolul III. DETERMINANȚI	37
1. Determinantul de ordinul n Proprietăți	37
1.1. Determinantul de ordinul 2	37
1.2. Determinantul de ordinul 3	38
1.3. Determinantul de ordinul n	41
1.4. Dezvoltarea unui determinant după o linie sau după o coloană	43
1.5. Proprietăți ale determinanților	45
2. Aplicații ale determinanților în geometria plană	55
2.1. Ecuația dreptei determinate de două puncte distincte. Coliniaritatea a trei puncte	55
2.2. Distanța de la un punct la o dreaptă	56
2.3. Aria unei suprafețe triunghiulare	57
Capitolul IV. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE	60
1. Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	60
2. Ecuații matriceale	64
3. Sisteme de ecuații liniare cu cel mult patru necunoscute	68

3.1. Sisteme de ecuații liniare. Noțiuni generale	68
3.2. Sisteme de ecuații liniare de tip Cramer	70
3.3. Rangul unei matrice	74
3.4. Studiul compatibilității sistemelor de ecuații liniare și rezolvarea acestora	78
ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ	93
Capitolul I. LIMITE DE FUNCTII	93
1. Structura de ordine a mulțimii \mathbb{R}	93
2. Intervale de numere reale	94
3. Mulțimi mărginite	97
3.1. Majoranți, minoranți	97
3.2. Marginile unei mulțimi de numere reale	100
3.3. Marginile unei mulțimi nemărginite. Dreapta încheiată	101
4. Vecinătățile unui punct pe axa reală	103
5. Funcții reale de variabilă reală	106
6. Limite de șiruri	113
6.1. Șiruri care au limită finită	113
6.2. Șiruri care au limită infinită	116
7. Proprietăți ale șirurilor care au limită	117
7.1. Proprietăți generale	117
7.2. Proprietăți ale șirurilor convergente	120
7.3. Trecerea la limită în inegalități	121
8. Criterii de existență a limitei unui șir	124
8.1. Criteriul de existență cu ε	124
8.2. Operații cu șiruri convergente	128
8.3. Criteriul majorării	134
8.4. Criteriul clestelui	140
8.5. Câteva limite remarcabile	142
9. Proprietatea lui Weierstrass	144
10. Aplicații ale teoremei lui Weierstrass	148
10.1. Șirul aproximărilor succesive ale unui număr real	148
10.2. Puteri cu exponent real	149
10.3. Studiul convergenței șirurilor date prin relații de recurență	149
10.4. Numărul e . Șiruri cu limita numărul e	151
11. Operații cu șiruri care au limită	156
11.1. Suma șirurilor care au limită	156

11.2. Produsul șirurilor care au limită	157
11.3. Câtul a două șiruri care au limită	158
11.4. Ridicarea la putere	160
11.5. Lema lui Stolz-Cesaro	162
12. Limite unei funcții într-un punct	165
13. Limite laterale	170
14. Proprietăți ale funcțiilor care au limită	173
15. Limitele funcțiilor elementare	177
16. Operații cu limite de funcții	181
16.1. Adunarea, înmulțirea, câtul și ridicarea la putere	181
16.2. Limite de funcții compuse	182
17. Asimptotele funcțiilor reale	186
17.1. Asimptote orizontale	186
17.2. Asimptote oblice	187
17.3. Asimptote verticale	190
Capitolul II. FUNCȚII CONTINUE	195
1. Funcții continue într-un punct	195
1.1. Definierea continuității	195
1.2. Continuitatea laterală	197
1.3. Prelungirea prin continuitate a unei funcții	199
1.4. Puncte de discontinuitate	200
2. Operații cu funcții continue	204
2.1. Suma, produsul, câtul și puteri de funcții continue	204
2.2. Continuitatea funcțiilor compuse	206
3. Proprietăți ale funcțiilor continue pe intervale	209
3.1. Existența soluțiilor unei ecuații	209
3.2. Stabilirea semnului unei funcții	210
3.3. Proprietatea lui Darboux	112
Capitolul III. FUNCȚII DERIVABILE	217
1. Derivata unei funcții într-un punct	217
1.1. Probleme care conduc la noțiunea de derivată	217
1.2. Definiția derivatei unei funcții într-un punct	218

1.3. Derivabilitate și continuitate	221
2. Derivate laterale	222
3. Derivatele unor funcții elementare	233
4. Operații cu funcții derivabile	236
4.1. Derivata sumei și a produsului	237
4.2. Derivata câtului	239
4.3. Derivarea funcției compuse	241
4.4. Derivarea funcției inverse	244
5. Derivate de ordinul II	250
6. Aplicații. Rădăcini multiple ale ecuațiilor polinomiale	252
7. Funcții derivabile pe un interval	257
7.1. Puncte de extrem	257
7.2. Teorema lui Fermat	259
7.3. Teorema lui Rolle	262
7.4. Aplicație. Șirul lui Rolle	267
7.5. Teorema lui Lagrange	270
7.6. Consecințe ale teoremei lui Lagrange	274
8. Regulile lui L'Hospital	278
9. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	285
9.1. Determinarea intervalelor de monotonie	285
9.2. Determinarea punctelor de extrem	288
9.3. Demonstrarea unor inegalități	291
10. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	294
10.1. Determinarea intervalelor de convexitate și concavitate	294
10.2. Determinarea punctelor de inflexiune	296
Capitolul IV. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR	299
1. Etapele reprezentării grafice a funcțiilor	299
2. Reprezentarea grafică a conicelor	305
3. Rezolvarea grafică a ecuațiilor	309
Indicații și răspunsuri	318
Bibliografie	334

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

CAPITOLUL I. PERMUTĂRI

1 NOȚIUNEA DE PERMUTARE

În clasa a X-a s-a definit noțiunea de mulțime finită ordonată și s-a determinat numărul de funcții bijective $f: A \rightarrow B$, unde A și B sunt mulțimi finite.

Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$.

❖ DEFINIȚIE

Se numește **permutare** a mulțimii A , oricare mulțime ordonată formată cu elementele acesteia.

O permutare a mulțimii A se poate scrie sub forma $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, unde $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Se observă că această permutare este descrisă de funcția bijectivă $f: A \rightarrow B$, $f(a_{i_k}) = a_{i_k}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, descriere care poate fi reprezentată și sub forma următorului tablou:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Pe linia întâi a tabloului sunt scrise elementele mulțimii A , iar pe linia a doua sunt scrise valorile funcției f , valori care sunt elementele lui A scrise în ordinea dată de funcția bijectivă f .

De asemenea, funcției f i se poate asocia funcția bijectivă:

$\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma(k) = i_k$, funcție care poate fi reprezentată sub forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

În acest mod, permutarea $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ a mulțimii A este bine descrisă de funcția bijectivă σ .

De aceea studiul permutărilor mulțimii finite A cu cardinalul $|A| = n$ se poate face studiind permutările mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, adică a funcțiilor bijective $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

□ NE REAMINTIM!

Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

și $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$

funcție bijectivă.

• Perechea (A, f) se

numește mulțime finită ordonată.

Fie A și B mulțimi având cardinalul $|A| = n$, $|B| = m$.

• Numărul funcțiilor bijective de la A la B este:

$$\begin{cases} 0, & n \neq m \\ n!, & n = m \end{cases}$$

❖ **DEFINIȚIE**

• Se numește **permutare de gradul n** a mulțimii $A = \{1, 2, \dots, n\}$ orice funcție bijectivă $\sigma : A \rightarrow A$.

Mulțimea permutărilor de gradul n se notează S_n , iar elementele ei se vor nota de regulă cu literele grecești $\sigma, \delta, \theta, \alpha, \beta \dots$, eventual însoțite de indici.

Se obișnuiește ca o permutare σ de gradul n să se reprezinte astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Cardinalul mulțimii S_n este: $|S_n| = n!$.

📖 **Exemple**

a) Pentru $n = 1, A = \{1\}$ și $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Pentru $n = 2, A = \{1, 2\}$ și $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Pentru $n = 3, A = \{1, 2, 3\}$ și $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \right.$

$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

PERMUTĂRI DE GRADUL n PARTICULARE

a) Permutarea $e \in S_n, e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește **permutarea identică** de gradul n .

b) Permutarea $\delta_{ij} \in S_n$, de forma:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & k & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & k & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}, \text{ care}$$

schimbă doar elementele i și j între ele, celelalte rămânând neschimbate, se numește **transpoziție**.

Transpoziția δ_{ij} poate fi descrisă prin următoarea lege de corespondență:

$$\delta_{ij}(k) = \begin{cases} i, & k = j \\ j, & k = i \\ k, & k \neq i, k \neq j \end{cases}.$$

$$\delta\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \delta(\sigma(1)) & \delta(\sigma(2)) & \delta(\sigma(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \delta(3) & \delta(1) & \delta(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\delta \neq \delta\sigma$.

2.2. PROPRIETĂȚI ALE COMPUNERII PERMUTĂRIILOR DE GRADUL n

■ P1. Proprietatea de asociativitate

Compunerea permutărilor de gradul n este operație asociativă:

$$\forall \sigma, \alpha, \beta \in S_n \Rightarrow (\sigma\alpha)\beta = \sigma(\alpha\beta).$$

Această proprietate rezultă din faptul că operația de compunere a funcțiilor este asociativă.

■ P2. Proprietatea elementului neutru

Permutarea identică de gradul n , $e \in S_n$, este **element neutru** pentru operația de compunere a permutărilor de gradul n :

$$\forall \sigma \in S_n, \text{ au loc egalitățile } \sigma e = e\sigma = \sigma.$$

■ P3. Orice permutare de gradul n are inversă.

$\forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Permutarea σ^{-1} se numește **inversa permutării** σ .

Pentru determinarea inversei permutării

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ se au în vedere corespondențele}$$

$$k \xrightarrow{\sigma} \sigma(k) \text{ și } \sigma(k) \xrightarrow{\sigma^{-1}} k. \text{ Așadar, } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix},$$

după care se ordonează prima linie.

👉 Exemflu

$$\text{Fie permutarea de gradul } 5, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Inversa permutării } \sigma \text{ este permutarea } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ care după ordonarea liniei întâi devine: } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Se verifică ușor că } \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e.$$

■ P4. Compunerea permutărilor de gradul n nu este operație comutativă.

Așadar, $\exists \sigma, \delta \in S_n$ astfel încât $\sigma\delta \neq \delta\sigma$.

👉 Exemflu

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\delta\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se observă că $\sigma\delta \neq \delta\sigma$.

We know books

2.3. PUTEREA UNEI PERMUTĂRI DE GRADUL n

Fie $\sigma \in S_n$. Notăm $\sigma^0 = e$, $\sigma^1 = \sigma$, $\sigma^2 = \sigma\sigma$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se definește $\sigma^n = \sigma^{n-1} \cdot \sigma$.

PROPOZIȚIE

Fie $\sigma \in S_n$. Au loc relațiile:

a) $\sigma^m \sigma^n = \sigma^{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$;

b) $(\sigma^m)^n = \sigma^{mn}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstrația se face folosind asociativitatea operației de compunere (temă).

Problemă rezolvată

☒ Fie $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze σ^2 , σ^3 , σ^4 , σ^{103} .

Soluție

Avem: $\sigma^2 = \sigma \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^4 = \sigma^3 \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

$$\sigma^{103} = \sigma^{4 \cdot 25 + 3} = \sigma^{4 \cdot 25} \sigma^3 = (\sigma^4)^{25} \sigma^3 = e \sigma^3 = \sigma^3.$$

Temă

Calculați:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{91}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{100}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{45}$.

2.4. PROPRIETĂȚI ALE TRANSPOZIȚIILOR

P1. Fie $\delta_{ij} \in S_n$ o transpoziție. Au loc relațiile:

a) $\delta_{ij} = \delta_{ji}$; b) $\delta_{ij}^2 = e$; c) $\delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$.

Demonstratie

a) Se folosește definiția transpoziției.

b) $(\delta_{ij} \circ \delta_{ji})(i) = \delta_{ij}(j) = i$; $(\delta_{ij} \circ \delta_{ij})(j) = \delta_{ij}(i) = j$.

Pentru $k \neq i$, $k \neq j$ avem $(\delta_{ij} \circ \delta_{ij})(k) = \delta_{ij}(\delta_{ij}(k)) = \delta_{ij}(k) = k$.

Așadar $\delta_{ij}^2 = e$.

c) În egalitatea $\delta_{ij} \circ \delta_{ij} = e$, compunând cu δ_{ij}^{-1} se obține $\delta_{ij} = \delta_{ij}^{-1}$. ■

■ **CONSECINȚĂ**

Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstratie

Într-adevăr, din proprietatea a) rezultă că numărul tuturor transpozițiilor de grad n este egal cu numărul submulțimilor $\{i, j\}$ ale mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, număr egal cu C_n^2 . ■

P2. Orice permutare de gradul n se scrie ca produs de transpoziții. Această scriere nu este unică.

□ **NE REAMINTIM!**

- $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$;
- $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$;
- $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Exercițiu rezolvat

▣ Să se scrie ca produs de transpoziții permutarea de gradul 4:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție

Se observă că $\sigma(1) = 3$, adică $\sigma(1) \neq 1$. Pentru a schimba 3 cu 1 se consideră transpoziția δ_{13} și se face compunerea:

$$\delta_{13}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_1. \quad \text{Deoarece } \sigma_1(2) = 4,$$

adică $\sigma_1(2) \neq 2$ pentru a schimba 4 cu 2 se alege transpoziția δ_{42} și se efectuează compunerea:

$$\delta_{42}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \delta_{43}.$$

Așadar, $\delta_{43} = \delta_{42}\sigma_1 = \delta_{42}\delta_{13}\sigma$. Compunând la stânga cu $\delta_{42}^{-1} = \delta_{42}$ și apoi cu $\delta_{13}^{-1} = \delta_{13}$ se obține $\sigma = \delta_{13}\delta_{42}\delta_{43}$.

O altă descompunere se obține considerând transpoziția δ_{14} și efectuând $\sigma\delta_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \theta_1$. Apoi se consideră transpoziția δ_{23} și se

efectuează $\theta_1 \delta_{23} = \delta_{43}$. Așadar $\delta_{43} = \theta_1 \delta_{23} = \sigma \delta_{14} \delta_{23}$. Compunând la dreapta cu

$\delta_{23}^{-1} = \delta_{23}$ și apoi cu $\delta_{14}^{-1} = \delta_{14}$ se obține $\sigma = \delta_{43} \delta_{23} \delta_{14}$.

3 INVERSIUNILE UNEI PERMUTĂRI SEMNLUL UNEI PERMUTĂRI

Fie $\sigma \in S_n$ și $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$.

❖ DEFINIȚIE

• Perechea (i, j) se numește **inversiune** a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Numărul inversiunilor permutării σ se notează $m(\sigma)$.

🔗 Exemplanu

$$\text{Fie } \sigma \in S_5, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inversiunile acestei permutări sunt perechile $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$. Așadar $m(\sigma) = 7$.

➡ OBSERVAȚII

1. Permutarea identică e are $m(e) = 0$.

2. Permutarea $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ are $m(\pi) = 1 + 2 + \dots + (n-1) =$
 $= \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$.

3. În general are loc relația $0 \leq m(\sigma) \leq C_n^2, \forall \sigma \in S_n$.

❖ DEFINIȚII

• Se numește **semnul (signatura)** permutării σ , numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$.

• Permutarea σ se numește **permutare pară** dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$.

• Permutarea σ se numește **permutare impară** dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$.

▣ PROPOZIȚIA 1

Orice transpoziție este permutare impară.

Demonstratie

Fie transpoziția $\delta_{ij} \in S_n$. Pentru $i < k < j$, inversiunile acestei transpoziții sunt toate perechile (i, k) și (k, j) la care se adaugă perechea (i, j) .

Avem $m(\delta_{ij}) = 2(j-i-1) - 1 = 2(j-i) - 1$. Așadar, $\varepsilon(\delta_{ij}) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$ și, ca urmare, δ_{ij} este permutare impară. ■

■ PROPOZIȚIA 2

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\sigma \in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$. (1)

Demonstratie

Produsul din relația (1) are C_n^2 factori. Dacă $\sigma(j) = k$ și $\sigma(i) = l$, atunci $k \neq l$ (σ este funcție bijectivă). Pentru $k > l$, factorul $\sigma(j) - \sigma(i) = k - l$ se simplifică cu factorul $(k - l)$ de la numitor, obținându-se 1.

Pentru $k < l$, prin simplificare, se obține -1 , iar perechea (i, j) este inversiune.

După toate simplificările se obține $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = (-1)^{m(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$. ■

Exemplu

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Avem $\prod_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{1-3}{2-1} \cdot \frac{2-3}{3-1} \cdot \frac{2-1}{3-2} = (-1)(-1) = (-1)^2 = (-1)^{m(\sigma)} = 1$.

Așadar σ este permutare pară.

Signatura compunerii a două permutări se poate calcula folosind următorul rezultat.

■ PROPOZIȚIA 3

Dacă $\sigma, \delta \in S_n$ atunci $\varepsilon(\sigma\delta) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta)$.

Demonstratie

Folosind Propoziția 2 avem:

$$\varepsilon(\sigma\delta) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\delta(j)) - \sigma(\delta(i))}{j - i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\delta(j)) - \sigma(\delta(i))}{\delta(j) - \delta(i)} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\delta(j) - \delta(i)}{j - i} =$$

 $= \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\delta)$, ceea ce justifică enunțul. ■

▲ Temă

1. Fie $\sigma, \delta \in S_n$. Să se demonstreze că:

- a) $\sigma\delta$ este permutare pară $\Leftrightarrow \sigma$ și δ au același semn;
- b) $\sigma\delta$ este permutare impară $\Leftrightarrow \sigma$ și δ au semne diferite.

2. Să se stabilească semnul permutărilor σ și σ^{-1} .

PROPOZIȚIA 4

Fie A_n mulțimea tuturor permutărilor pare de gradul n . Atunci cardinalul acestei mulțimi este $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Demonstratie

Notăm $I_n = S_n \setminus A_n$. Definim funcția $f: A_n \rightarrow I_n$, $f(\sigma) = \sigma \cdot \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este o transpoziție fixată. Demonstrăm că f este bijectivă. Fie $\alpha, \beta \in S_n$ și $f(\alpha) = f(\beta)$. Rezultă succesiv $\alpha \delta_{ij} = \beta \delta_{ij} \Rightarrow (\alpha \delta_{ij}) \delta_{ij}^{-1} = (\beta \delta_{ij}) \delta_{ij}^{-1} \Rightarrow \alpha = \beta$, adică f este injectivă.

Fie $\theta \in I_n$, $\varepsilon(\theta) = -1$. Avem $\theta \cdot \delta_{ij} \in A_n$, deoarece $\varepsilon(\theta \delta_{ij}) = \varepsilon(\theta) \varepsilon(\delta_{ij}) = (-1)(-1)$ și $f(\theta \delta_{ij}) = \theta \delta_{ij} \delta_{ij} = \theta$. Rezultă că funcția f este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă și $|A_n| = |I_n|$. Deoarece $S_n = A_n \cup I_n$ și $A_n \cap I_n = \emptyset$, rezultă egalitatea $|A_n| = |I_n| = \frac{n!}{2}$. ■

Problemă rezolvată

☒ Să se determine:

- a) numărul permutărilor pare din mulțimea S_8 ;
- b) cardinalul mulțimii S_n , dacă $|A_n| = 15(n-2)!$.

Soluție

a) Avem egalitatea $|A_8| = \frac{|S_8|}{2} = \frac{8!}{2} = 20160$.

b) Avem relația $\frac{n!}{2} = 15(n-2)!$, care este echivalentă cu $\frac{n(n-1)}{2} = 15$.

Se obține $n = 6$. Rezultă că mulțimea S_6 are $6! = 720$ elemente.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Fie A o mulțime nevidă cu n elemente. Să se determine gradul permutărilor ei știind că S_n are:

- a) 24 de elemente;
- b) 720 de elemente;
- c) 5040 de elemente.

E2. Să se calculeze $\sigma\pi, \pi\sigma, \sigma^2, \pi^2, (\sigma\pi)^3$, în cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

E3. Fie $\sigma, \delta \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
 $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $\sigma\delta = \delta\sigma$ și

$$(\sigma\delta)^2 = \delta^2\sigma^2.$$

b) Să se determine $\sigma^{-1}, \delta^{-1}, (\sigma\delta)^{-1}, \sigma^{-1}\delta^{-1}$.

E4. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve ecuațiile $x\alpha = \beta$ și $\beta y = \alpha^3$.

E5. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^k = e$, în cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $\sigma^{100}, \sigma^{203}, \sigma^{2007}$ în fiecare caz.

E6. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine

$$\text{mulțimea } M = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots, \sigma^n, \dots\}.$$

E7. Să se scrie transpozițiile de gradul 4, respectiv 5.

E8. Să se determine numărul inversiunilor și signatura permutărilor:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

APROFUNDARE

A1. Fie permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze $\sigma\theta\varepsilon, \sigma^{-1}\theta^{-1}\varepsilon^{-1}, (\varepsilon\theta\sigma)^{-1}$.

b) Să se calculeze $\sigma^{2007}, \theta^{2005}, \varepsilon^{2010}$.

c) Să se rezolve ecuațiile $\sigma x = 0$,

$$\sigma y \varepsilon = \theta, z \sigma^{2005} = \theta^{2006} \varepsilon^{2006}.$$

A2. Fie $\alpha, \beta \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine numărul de inversiuni și signatura acestor permutări.

b) Să se rezolve ecuațiile $\alpha^{11}x = \beta^{110}$,

$$\alpha^{301}x\beta^{1027} = (\alpha\beta)^{-2005}, \alpha x = x\alpha, \alpha x = x\beta.$$

A3. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$.

A4. Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Să se determine $\sigma^n, n \in \mathbb{N}^*$.

A5. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, știind că S_n are 45 de transpoziții.

A6. Fie A_n mulțimea permutărilor pare ale unei mulțimi cu n elemente. Să se determine n , știind că A_n are cardinalul:

a) $\frac{(n+4)!}{6!}$; b) $\frac{(n+3)!}{28 \cdot 4!}$.

A7. Fie $\sigma, \varepsilon \in S_8$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & i & 2 & 1 & j \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & k & 5 & p & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Să se determine permutările astfel încât σ să fie impară, iar ε să fie pară.

A8. Fie $\sigma, \alpha \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

și $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(n) & \sigma(n-1) & \dots & \sigma(1) \end{pmatrix}$.

Știind că $m(\sigma) = k$, să se calculeze $m(\alpha)$.

A9. Se consideră permutările:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine $m(\alpha) + m(\beta)$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care α este permutare pară, respectiv β este permutare impară.

A10. Să se scrie ca produs de transpoziții permutările:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

A11. Să se determine permutările $\sigma, \delta \in S_n$, în cazurile:

a) $\frac{\sigma(1)}{1} = \frac{\sigma(2)}{2} = \dots = \frac{\sigma(n)}{n}$;

b) $\frac{\delta(1)}{n} = \frac{\delta(2)}{n-1} = \dots = \frac{\delta(n)}{1}$.

A12. Fie $\alpha, \beta \in S_n$. Să se arate că:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha(1)}{\beta(1)} = \frac{\alpha(2)}{\beta(2)} = \dots = \frac{\alpha(n)}{\beta(n)}.$$

A13. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

A14. Fie numărul 5213. Făcând toate permutările cifrelor acestui număr și ordonând crescător numerele obținute, să se precizeze ce loc ocupă în șir numerele:

a) 2135; b) 3521; c) 5213.

A15. Se consideră numărul natural

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 25143.$$

Să se calculeze suma

$$s = \sum_{\sigma \in S_5} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)} a_{\sigma(5)}.$$

DEZVOLTARE

D1. Să se determine toate permutările $\sigma \in S_n, n \geq 3$ astfel încât numerele $1 + \sigma(1), 2 + \sigma(2), \dots, n + \sigma(n)$ să formeze:

- a) o progresie aritmetică;
b) o progresie geometrică.

D2. Se dau numerele strict pozitive $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma:

a) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă (minimă);

b) $\sum_{i=1}^n a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă (minimă).

D3. Fie $H \subset S_n, H \neq \emptyset$ cu proprietatea că

$\forall \sigma, \theta \in H \Rightarrow \sigma\theta \in H$. Să se arate că:

a) permutarea identică $e \in H$;

b) dacă $\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H$.

D4. Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$. Dacă $\sigma\alpha = \alpha\sigma$,
 $\forall \alpha \in S_n$, atunci $\sigma = e$.

D5. Să se studieze surjectivitatea funcției $f: S_4 \rightarrow S_4$, $f(\alpha) = \alpha^4$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

○ 1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $\sigma\theta$, $\theta\sigma$, σ^{-1} , θ^{-1} .

b) Verificați dacă are loc egalitatea $(\sigma\theta)^{-1} = \theta^{-1}\sigma^{-1}$.

○ 2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze σ^{-1} , δ^{-1} , σ^{2005} , δ^{2006} .

b) Să se rezolve ecuațiile $\sigma x = \delta$, $\delta x \sigma^{2005} = \delta^{2006}$.

○ 3. Să se determine semnul permutării $\sigma \in S_7$, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Testul 2

○ 1. Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $\sigma^4 = e$ și $\pi^3 = e$.

b) Să se rezolve ecuațiile $\sigma^{258}x = \pi^{301}$, $y\sigma^{145} = \pi^{98}$.

○ 2. Să se rezolve în S_3 sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = y \\ x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y \end{cases}$$

○ 3. Fie $\sigma \in S_8$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $m(\sigma)$ și $\varepsilon(\sigma)$.

b) Câte soluții are ecuația $x^2 = \sigma$?

○ 4. Să se scrie ca produs de transpoziții permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

CAPITOLUL II. MATRICE

LBRIS

We know books

1

TABEL MATRICEAL. MATRICE MUȘTIMI DE MATRICE

Să considerăm următorul enunț din domeniul economiei.

„Un depozit de materiale se aprovizionează eşalonat pe o perioadă de 4 luni cu un anumit produs după următorul plan:

– în prima lună se aprovizionează cu 100 de bucăți, la prețul unitar de 3 000 unități monetare (u.m.);

– în a doua lună se aprovizionează cu 120 de bucăți la prețul unitar de 3 500 u.m.;

– în luna a treia primește cu 10 bucăți mai puțin decât în luna precedentă, cu prețul pe unitate de produs de 3 200 u.m., iar în luna a patra comandă o cantitate dublă față de prima lună plătind 3 200 u.m. pe unitatea de produs.“

Pentru ținerea unei evidențe cât mai clare, aceste date pot fi ordonate și clasate în diverse moduri, astfel încât obținerea unor informații legate de acest proces de aprovizionare să se realizeze cât mai eficient.

Astfel, datele de mai sus pot fi grupate într-un tabel de forma:

Luna	1	2	3	4
Cantitate	100	120	110	200
Preț unitar	3 000	3 500	3 200	3 200

Într-un mod mai simplificat, aceste date pot fi reorganizate într-un tabel de forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3\ 000 & 3\ 500 & 3\ 200 & 3\ 200 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3\ 000 & 3\ 500 & 3\ 200 & 3\ 200 \end{pmatrix}.$$

Un astfel de tabel se numește **tabel matriceal**.

Primul tabel matriceal este format din 3 linii și 4 coloane (este de tipul 3×4), iar al doilea tabel matriceal este format din 2 linii și 4 coloane (este de tipul 2×4).

Dacă se ia în considerare numai linia care conține cantitățile achiziționate lunar, se obține un tabel de forma (100 120 110 200) numit **tabel matriceal linie**.